LA PERCOLATION, ET UN RÉSULTAT DE S. SMIRNOV

par

Vincent BEFFARA

Résumé. — Le but de cette note est de présenter l'un des résultats de Stanislav Smirnov pour lesquels il a reçu la médaille Fields en 2010 ; ce résultat concerne l'invariance conforme du comportement asymptotique de la percolation en dimension 2, et nous en profitons pour décrire le modèle de manière un peu plus générale.

***Abstract* (Percolation, and a theorem by S. Smirnov).** — The aim of this note is to present one of the results for which Stanislav Smirnov was awarded the Fields medal in 2010 ; it is a theorem proving the conformal invariance of the asymptotic behavior of percolation in dimension 2, and we use the occasion to present the model in more generality.

Introduction

La percolation est un modèle de mécanique statistique introduit par Broadbent et Hammersley [**5**] en 1957 pour étudier le flot d'un fluide à travers un milieu aléatoire poreux, représenté comme un réseau de canaux microscopique ; il s'agit du système le plus simple pour lequel une *transition de phase* se produit. En dehors de ses applications nombreuses à l'étude de phénomènes comme les feux de forêt, et à celle de modèles plus "physiques" comme le modèle d'Ising, la percolation est à l'interface de plusieurs branches des mathématiques : probabilités et théorie des graphes bien sûr, mais aussi théorie des groupes, géométrie, et plus récemment (avec les travaux de Lawler, Schramm, Smirnov et Werner) analyse complexe.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe ($\mathbb{Z}^d$ dans le modèle initial, mais n'importe quel graphe infini, connexe, localement fini et quasi-transitif fera l'affaire), $\mathcal{V}$ l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses arêtes ; soit $p \in (0,1)$. On peut construire un sous-graphe aléatoire $\mathcal{G}_p$ de $\mathcal{G}$ en déclarant chaque arête *ouverte* avec probabilité p et *fermée* avec probabilité $1-p$, de manière indépendante, et en gardant seulement les arêtes ouvertes ; on obtient ainsi une mesure P_p sur l'ensemble des sous-graphes de $\mathcal{G}$, qui porte le nom de **percolation par arêtes de paramètre p sur $\mathcal{G}$**.

Un *chemin* sur $\mathcal{G}$ est une suite de sommets de $\mathcal{G}$, chacun étant relié au suivant par une arête du graphe. Un chemin est dit *ouvert* si toute les arêtes correspondantes sont ouvertes ; on dit que deux sommets sont *reliés* si il existe un chemin ouvert passant par eux deux, ce qui équivaut à dire qu'ils sont dans la même composante connexe de $\mathcal{G}_p$; on notera cet événement $x \leftrightarrow y$. On dira que deux parties A et B de $\mathcal{V}$ sont reliées, et on notera $A \leftrightarrow B$, si il existe un chemin ouvert reliant un point de A à un point de B. On notera $C(v)$ l'ensemble des sommets reliés à v, *i.e.* la composante connexe de v dans $\mathcal{G}_p$; par un abus de notation courant, on écrira $v \leftrightarrow \infty$ pour dire que $C(v)$ est infini.

Il existe une variante du modèle, dite **percolation par site**, dans laquelle toutes les arêtes restent ouvertes mais où chaque sommet est déclaré ouvert avec probabilité p ; dans ce cadre, un chemin sera dit ouvert si tous ses sommets sont ouverts, mais les autres définitions restent les mêmes. Sauf précision contraire, tous les énoncés qui suivent sont valables de la même façon dans les deux cas. Enfin, une partie de la littérature désigne sous le terme de percolation n'importe quelle mesure de probabilité sur l'ensemble des sous-graphes de $\mathcal{G}$; le cas d'arêtes ou de sites indépendants est alors nommé **percolation de Bernoulli**.

La quantité la plus importante dans l'étude du modèle est la **probabilité de percolation**, définie (étant donné un sommet marqué 0) par

$$\theta(p) := P_p\left[0 \leftrightarrow \infty\right] \in [0,1)$$

(si le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas transitif, cette probabilité peut dépendre du choix de l'origine ; en revanche, le fait qu'elle soit ou non positive n'en dépend pas). La fonction θ ainsi définie est croissante ; de plus, $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$. On peut donc définir

$$p_c = p_c(\mathcal{G}) := \sup\{p : \theta(p) = 0\} = \inf\{p : \theta(p) > 0\} \in [0,1]$$

qui porte le nom de **paramètre critique** du modèle.

Par définition, si $p < p_c$ la composante connexe de l'origine est finie presque sûrement, et par conséquent avec probabilité 1 toutes les composantes connexes du graphe aléatoire $\mathcal{G}_p$ sont finies. Si $p > p_c$, l'origine est avec probabilité strictement positive dans une composante connexe infinie, et le théorème ergodique implique qu'il existe presque sûrement au moins une composante connexe infinie dans $\mathcal{G}_p$. Un tel changement de comportement porte le nom de **transition de phase**.

La première question qui se pose naturellement est celle de la valeur de p_c. Il n'est pas difficile de voir que dès que le degré du graphe est borné par $D > 0$, on a $p_c \geqslant (D-1)^{-1} > 0$. En effet, le nombre de chemins issus de l'origine et utilisant n arêtes disjointes est au plus de $D(D-1)^{n-1}$, et chacun d'entre eux est ouvert avec une probabilité p^n, ce qui implique que la probabilité que $C(0)$ contienne un point à distance n est au plus $pD[p(D-1)]^{n-1}$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ (ce qui implique que $C(0)$ est fini presque sûrement) dès que $p < (D-1)^{-1}$. Dans l'autre direction, il n'est pas toujours vrai que $p_c < 1$: un contre-exemple immédiat est le cas où le graphe est $\mathbb{Z}$, mais il n'y a pas de critère général permettant d'obtenir une telle borne.

La valeur exacte de p_c n'est quant à elle connue exactement que dans un très petit nombre de cas. Si le graphe est un arbre, alors la percolation se réduit à un processus de branchement, dont l'étude est facile ; dans le cas de l'arbre homogène de degré D, on a $p_c = (D-1)^{-1}$. Si le graphe est planaire, des arguments de dualité permettent parfois de calculer p_c (on y reviendra plus bas), mais c'est loin d'être le cas général.

1. La percolation sur $\mathbb{Z}^d$

Le premier cadre dans lequel la percolation a été étudiée est celui du réseau cubique $\mathbb{Z}^d$ (avec $d \geqslant 2$ pour que le modèle ne soit pas trivial) ; la référence “canonique” sur le sujet est le livre de Grimmett [**8**]. La preuve de l'inégalité $p_c < 1$ est due à Hammersley [**10**], et repose sur des arguments de comptage de chemins (argument dit “de Peierls”) ; en particulier, les deux phases décrites plus haut sont effectivement réalisables en choisissant le paramètre p correctement. On dit que le système est *sous-critique* si $p < p_c$, *sur-critique* si $p > p_c$ et *critique* si $p = p_c$.

1.1. Loin du régime critique. — Dans le régime sous-critique, presque sûrement toutes les composantes connexes de $\mathcal{G}_p$ sont finies par définition de p_c, mais dans le cas de $\mathbb{Z}^d$ ou plus généralement d'un graphe périodique, on a en fait le résultat plus fort de **décroissance exponentielle** suivant :

Théorème 1.1 **(Aizenman and Barsky [1], Menshikov[13])**
Pour tout $p < p_c$ *il existe* $0 < C_1, C_2 < \infty$ *telles que, pour tout* $n > 0$,
$$P_p\left[|C(0)| \geqslant n\right] \leqslant C_1 e^{-C_2 n}.$$

En particulier, l'espérance de $|C(0)|$ est finie, et la probabilité que le *diamètre* de $C(0)$ soit plus grand que $l > 0$ décroît elle aussi exponentiellement vite. Un résultat plus précis concerne la décroissance de la *fonction à deux points* : il existe deux constantes $0 < c < C < \infty$ et une fonction $\xi : (0, p_c) \to \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, tout $p \in (0, p_c)$ et tout $n > 0$, on ait
$$P_p\left[0 \leftrightarrow nx\right] = \exp\left(-\frac{n\varphi_p(n,x)}{\xi(p)}\right)$$
avec $c < \varphi_p(n,x) < C$. La fonction ξ porte le nom de **longueur de corrélation** du modèle ; elle tend vers l'infini au point critique.

Dans le cas $p > p_c$, le graphe $\mathcal{G}_p$ a au moins une composante connexe infinie par définition ; mais en fait le nombre de composantes connexes infinies est presque sûrement égal à 1. Cela est une conséquence de la moyennabilité de $\mathbb{Z}^d$, et on y reviendra par la suite. Cette composante infinie a une densité asymptotique égale à $\theta(p)$, et "ressemble beaucoup" à $\mathbb{Z}^d$ lui-même — par exemple, la marche aléatoire simple y est diffusive, récurrente si $d = 2$ et transiente si $d \geqslant 3$.

On a encore décroissance exponentielle pour les composante connexes *finies* :

$$P_p\left[n \leqslant |C(0)| < \infty\right] \leqslant C_1 e^{-C_2 n}$$

(intuitivement, dès qu'une composante connexe est suffisamment grande, elle rencontre la composante infinie avec une grande probabilité). On a également existence d'une longueur de corrélation pour la probabilité que 0 et nx soient reliés *à l'intérieur d'une composante connexe finie.*

1.2. Autour du régime critique. — Le fait que la longueur de corrélation tende vers l'infini au point critique indique que l'on n'a pas décroissance exponentielle quand $p = p_c$. Le comportement (conjecturé) du système fait apparaître des **exposants critiques** : quand $p \to p_c$,

$$\theta(p) \approx (p - p_c)_+^\beta \qquad \xi(p) \approx |p - p_c|^{-\nu} \qquad E_p[|C(0)|\mathbb{1}_{|C(0)|<\infty}] \approx |p - p_c|^{-\gamma}$$

et pour le système pris au point critique :

$$P_{p_c}[|C(0)| = n] \approx n^{-1-1/\delta} \quad P_{p_c}[0 \leftrightarrow x] \approx |x|^{2-d-\eta} \quad P_{p_c}[\mathrm{diam}(C(0)) = n] \approx n^{-1-1/\rho}.$$

En utilisant des arguments non rigoureux basés sur l'utilisation du *groupe de renormalisation*, les physiciens prédisent que ces exposants dépendent de la dimension d du système, mais sont les mêmes pour tous les réseaux de même dimension (alors que bien sûr la valeur de p_c change d'un réseau à l'autre). Ce phénomène porte le nom d'**universalité** — mais il est extrêmement mal compris par les mathématiciens.

En supposant l'existence de ces exposants, on peut obtenir des relations entre eux dites **relations de scaling**. L'idée est la suivante : si on considère la percolation pour un paramètre proche de p_c, dans une boule de taille plus petite que $\xi(p)$, on ne voit pas la décroissance exponentielle et tout devrait se passer comme si on avait $p = p_c$. On obtient les relations suivantes (démontrées rigoureusement par Kesten [**12**] en dimension 2) :

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \qquad \gamma + 2\beta = \beta(\delta + 1).$$

En dimension $d \leqslant 6$, on conjecture également la relation dite d'*hyperscaling*

$$d\rho = \delta + 1.$$

En grande dimension (ce qui suit est prouvé rigoureusement pour $d \geqslant 19$, mais conjecturé dès que $d > 6$), ces exposants ne dépendent plus de la dimension mais prennent leur valeur de **champ moyen**, qui est leur valeur pour la percolation sur un arbre régulier :

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \quad \eta = 0, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

En dimension 2, on conjecture les valeurs suivantes :

$$\beta = \frac{5}{36}, \quad \gamma = \frac{43}{18}, \quad \delta = \frac{91}{5}, \quad \eta = \frac{5}{24}, \quad \nu = \frac{4}{3}, \quad \rho = \frac{48}{5}$$

(on reviendra sur ce point plus bas).

2. Le cas particulier de la dimension 2

2.1. Calcul du point critique. — L'un des résultats les plus marquants de la théorie de la percolation est la preuve par Kesten [**11**] du fait que, sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, le paramètre critique est égal à $1/2$. Les détails techniques dépasseraient largement le cadre de cette note, mais l'argument fondamental est celui de **dualité planaire**, que nous décrivons brièvement ici.

De manière générale, si $\mathcal{G}$ est un graphe planaire plongé dans le plan $\mathbb{R}^2$, on peut lui associer un *graphe dual* $\mathcal{G}^\star$ dont les sommets sont en bijection avec les faces de $\mathcal{G}$ et les arêtes en bijection avec celles de $\mathcal{G}$. Étant donné un sous-graphe aléatoire $\mathcal{G}_p$ de $\mathcal{G}$, on peut construire un sous-graphe $\mathcal{G}_p^\star$ de $\mathcal{G}^\star$ en déclarant une arête du dual ouverte si et seulement si l'arête de $\mathcal{G}$ correspondante est fermée. Ce que l'on obtient ainsi est exactement la percolation de Bernoulli sur le graphe $\mathcal{G}^\star$ pour le paramètre $p^\star = 1 - p$.

Il est facile de se convaincre du fait qu'une composante connexe de $\mathcal{G}_p$ est finie si et seulement si elle est entourée d'une composante connexe de $\mathcal{G}_p^\star$. On s'attend donc à ce que, si $p^\star$ est sous-critique, $\mathcal{G}_p$ contienne une composante connexe infinie, puisque toutes celles de $\mathcal{G}_p^\star$ sont "petites" ; inversement, la présence d'une composante connexe infinie dans le graphe dual semble empêcher p d'être sur-critique. Voilà pour l'intuition, qui mène à la conjecture naturelle que

$$p_c(\mathcal{G}) + p_c(\mathcal{G}^\star) = 1,$$

que l'on sait prouver sous des hypothèses suffisantes de symétrie sur $\mathcal{G}$. Le réseau carré étant isomorphe à son dual, on en déduit que $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$.

Il existe une autre transformation dite **triangle-étoile** qui permet de relier deux graphes : si $\mathcal{G}$ contient un *triangle*, *i.e.* trois sommets formant un sous-graphe complet, on peut remplacer ces trois arêtes par une *étoile*, *i.e.* ajouter un sommet supplémentaire au centre du triangle, relié à chacun des trois sommets extérieurs. Un cas particulier de cette transformation est celui du réseau triangulaire $\mathcal{T}$: si on remplace chacun des triangles d'une certaine orientation par une étoile, on obtient le réseau hexagonal $\mathcal{H}$.

On peut comparer les probabilités de connection à l'intérieur d'un de ces triangles pour la percolation de paramètres respectivement p sur le premier et q sur le second ; on constate qu'elles sont égales pour toutes les configurations locales si et seulement si $p + q = 1$ et $p^3 - 3p + 1 = 0$. Pour un tel choix, les deux graphes aléatoires correspondants ont alors les mêmes propriétés asymptotiques : p est surcritique en même temps que q. Comme $\mathcal{H}$ est le graphe dual de $\mathcal{T}$, leurs points critiques sont de somme 1, et on en déduit que $p_c(\mathcal{T})$ satisfait l'équation $p_c^3 - 3p_c + 1 = 0$. Autrement dit, on peut le calculer explicitement, et on obtient

$$p_c(\mathcal{T}) = 2\sin\left(\frac{\pi}{18}\right).$$

2.2. Le cas critique en dimension 2. — Une conséquence supplémentaire de l'argument de dualité est la suivante. Considérons la percolation par arêtes de paramètre $p = 1/2$ sur le rectangle R de taille $(n+1) \times n$ de $\mathbb{Z}^2$. Le graphe dual de ce rectangle est celui $R^\star$ de taille $n \times (n+1)$. Soit $LR(n+1, n)$ l'événement qu'il existe un chemin ouvert traversant R horizontalement. L'événement complémentaire est exactement l'existence, dans le modèle dual, d'un chemin ouvert traversant $R^\star$ verticalement ; mais ce dernier événement a la même probabilité que le premier parce que R et $R^\star$ sont isomorphes : on obtient donc l'estimée fondamentale

$$P_{1/2}\left[LR(n+1, n)\right] = \frac{1}{2}$$

indépendamment de la valeur de n. En particulier, il ne peut pas y avoir décroissance exponentielle pour $p = 1/2$. On peut étendre cette estimée à des rectangles de forme quelconque :

***Théorème 2.1* (Russo [15], Seymour–Welsh [16]).** — *Pour tous $a, b > 0$ il existe $\eta > 0$ et $N > 0$ tels que, pour tout $n \geqslant N$,*

$$P_{1/2}\left[LR(na, nb)\right] \in (\eta, 1-\eta).$$

On en déduit facilement que $\theta(1/2) = 0$, et donc que $p_c \geqslant 1/2$: en effet, tout anneau entre les rayons R et $2R$ contient, avec probabilité minorée, un circuit formé d'arêtes duales ouvertes, et ces événements sont indépendants pour des anneaux disjoints. On en déduit un peu moins facilement que $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$ — la preuve du théorème n'utilise pas le fait que $1/2$ soit critique, seulement qu'il soit auto-dual.

Une question naturelle est alors de savoir si la probabilité de traverser un rectangle de taille $na \times nb$ converge quand n tend vers l'infini. Plus généralement, étant donné un domaine lisse simplement connexe Ω du plan complexe, on peut considérer la percolation critique sur l'intersection de Ω avec le réseau $\delta\mathbb{Z}^2$; si a, b, c et d sont quatre points (dans cet ordre) du bord de Ω, soit $f_\delta(ab, cd, \Omega)$ la probabilité qu'il existe dans $\Omega \cap \delta\mathbb{Z}^2$ un chemin d'arêtes ouvertes connectant les arcs ab et cd de $\partial\Omega$.

Le théorème précédent entraîne qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $f_\delta(ab, cd, \Omega) \in (\eta, 1-\eta)$, uniformément en $\delta > 0$. Il est naturel de conjecturer l'existence d'une **limite d'échelle** de cette probabilité quand δ tend vers 0. Cette question est toujours ouverte, mais le résultat le plus retentissant de ces quelques dernières années est la preuve par Smirnov de l'existence d'une telle limite dans un cas proche, que nous énonçons maintenant.

2.3. Invariance conforme de la percolation critique. — Considérons la percolation *par sites* sur le réseau *triangulaire* ; pour les mêmes raisons de dualité, on a également dans ce cas les bornes uniformes sur la probabilité de traverser des domaines du plan quand $p = 1/2$, qui est encore le point critique du modèle. On peut définir f_δ de la même façon ; alors,

***Théorème 2.2* (Smirnov [17]).** — *Avec les notations précédentes,*

1. $f_\delta(ab, cd, \Omega)$ *converge vers un certain* $f(ab, cd, \Omega)$ *quand* $\delta \to 0$ *;*
2. *Si* Φ *envoie conformément* Ω *sur un autre domaine simplement connexe, alors*
$$f(ab, cd, \Omega) = f(\Phi(a)\Phi(b), \Phi(c)\Phi(d), \Phi(\Omega))\ ;$$
3. *Si* $T = abc$ *est un triangle équilatéral de côté* 1*, alors* $f(ab, cd, T)$ *est égal à la longueur* cd*.*

Le second point porte le nom d'**invariance conforme** de la limite d'échelle ; par le théorème de Riemann, et le cas particulier du troisième point, il permet de calculer $f(ab, cd, \Omega)$ dans tous les cas. Dans le cas du rectangle, on obtient la **formule de Cardy**, initialement conjecturée sur la base d'arguments non rigoureux de théorie conforme des champs. La remarque que la formule s'écrit de manière particulièrement simple dans le cas du triangle est due à Carleson ; elle n'est sans doute pas étrangère au fait que les faces du réseau soient également dans ce cas des triangles équilatéraux, mais ce lien reste complètement obscur dans la preuve.

Il est remarquable que la preuve de ce théorème soit extrêmement simple (voir par exemple [**2**]) et n'utilise que des résultats de base d'analyse complexe (essentiellement le théorème de Morera) ; l'étape cruciale est une remarque combinatoire très astucieuse mais facile à prouver *a posteriori*. Cette simplicité apparente masque le fait que le modèle soit particulièrement simple à étudier sur le réseau triangulaire, et à ce jour on ne connaît pas d'autre réseau sur lequel la limite d'échelle de la percolation soit connue.

On peut déduire de ce théorème tous les énoncés précédents sur la percolation critique (toujours dans le cas du réseau triangulaire), en particulier les valeurs des exposants critiques en découlent [**19**]. On peut également en déduire des informations de nature géométrique sur la forme des composantes connexes au point critique, et la convergence de leurs bords vers des **processus de Schramm-Loewner** quand $\delta \to 0$, mais donner des énoncés précis sortirait du cadre élémentaire de cette note.

3. Quelques extensions naturelles du modèle

3.1. Le rôle de la moyennabilité. — Revenons à un énoncé précédent : sur $\mathbb{Z}^d$, si $p > p_c$, il y a une unique composante connexe infinie. La preuve la plus éclairante de ce fait est celle de Burton et Keane [**6**], qui fonctionne de la manière suivante. Fixons

$p > p_c$, et soit N le nombre de composantes connexes infinies de $\mathcal{G}_p$. L'invariance par translation du modèle entraîne que N prend une valeur presque sûre $n(p) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $1 < n(p) < \infty$, alors il existe $L > 0$ tel que la boule de rayon L rencontre au moins deux composantes infinies distinctes avec probabilité positive ; en ouvrant toutes les arêtes de la boule (qui sont en nombre fini) on obtient un événement qui est toujours de probabilité positive, mais sur lequel il y a strictement moins de composantes connexes — ce qui est absurde. On a donc $n(p) \in \{0, 1, \infty\}$.

Supposons à présent que $n(p) = \infty$. À nouveau, pour L assez grand, la boule de rayon L rencontre au moins trois composantes connexes infinies, et par une modification locale on arrive, toujours avec probabilité finie, à un événement sur lequel 0 est une *trifurcation*, un point d'une composante connexe infinie tel que, si on l'ôte de cette composante, on la sépare en trois composantes infinies disjointes.

L'invariance par translation implique que chaque point est une trifurcation avec probabilité positive. Dans une boule de rayon L, il y a donc en espérance de l'ordre de L^d trifurcations ; mais le nombre de composantes infinies rencontrant cette boule est au plus de l'ordre du cardinal de son bord, *i.e.* L^{d-1}, et il est facile de voir que ce nombre est au moins égal au nombre de trifurcations dans la boule. On arrive donc à une contradiction : $n(p)$ ne peut pas être infini, ce qu'on voulait.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe transitif (ou quasi-transitif, *i.e.* dont le groupe d'automorphismes a un nombre fini d'orbites) infini, de degré borné. Sa *constante de Cheeger* est définie comme

$$\iota(\mathcal{G}) := \inf \frac{|\partial V|}{V}$$

où l'infimum est pris sur toutes les parties finies non vides de $\mathcal{G}$. Le graphe est **moyennable** si $\iota(\mathcal{G}) = 0$, non moyennable sinon ; et l'argument de Burton et Keane prouve en fait que $n(p) \in \{0, 1\}$ dès que $\mathcal{G}$ est moyennable.

Le cas non-moyennable est plus riche. Häggström et Peres [**9**] prouvent que, si $n(p) = 1$ et $p' > p$, alors $n(p') = 1$ également. On peut donc définir un second point critique,

$$p_u := \inf\{p : n(p) = 1\}$$

et on a alors trois phases possibles :

– Si $0 \leqslant p < p_c$, alors $\mathcal{G}_p$ n'a que des composantes finies ;
– Si $p_c < p < p_u$, alors $\mathcal{G}_p$ a une infinité de composantes infinies ;
– Si $p_u < p \leqslant 1$, alors $\mathcal{G}_p$ a une seule composante infinie.

Si $\mathcal{G}$ est le produit de $\mathbb{Z}$ et d'un arbre de degré suffisamment grand, Grimmett et Newman [**7**] prouvent que l'on a $0 < p_c < p_u < 1$, donc tous ces régimes peuvent se produire sur le même graphe selon la valeur de p.

La conjecture naturelle est que $p_c < p_u$ si et seulement si $\mathcal{G}$ n'est pas moyennable, mais la question reste ouverte dans le cas général [**4**]. Si G est un *groupe de type fini* non moyennable, un théorème de Pak et Smirnova [**14**] donne l'existence d'une famille de générateurs de G telle que, sur le graphe de Cayley correspondant, on ait effectivement $p_c < p_u$; Gaboriau montre que c'est aussi le cas si le graphe $\mathcal{G}$ est transitif, localement fini, unimodulaire et porte des fonctions harmoniques bornées non constantes dont le gradient est dans ℓ^2.

3.2. Modèles dépendants. — On a utilisé plusieurs fois dans ce qui précède l'indépendance entre les états des différentes arêtes, mais dans la plupart des situations, ce qui est vraiment nécessaire est la **propriété d'énergie finie**, qui exprime qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute arête e de $\mathcal{G}$, et uniformément en l'état des autres arêtes, la probabilité conditionnelle que e soit ouverte est dans l'intervalle $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$.

Un cas particulièrement intéressant est celui de la **percolation FK** (ou *random-cluster model*). Si le graphe $\mathcal{G}$ est fini, elle est définie *via* sa densité de Radon-Nikodym par rapport à la percolation de Bernoulli P_p, que l'on choisit proportionnelle à q^K où $K(\omega)$ est le nombre de composantes connexes de la configuration ω et où $q \geqslant 1$ est un second paramètre du modèle. Dans le cas de $\mathbb{Z}^d$, on peut construire la mesure $P_{p,q}$ en prenant la *limite thermodynamique* de cas de volume fini. Le même argument de dualité que pour la percolation fournit la prédiction

$$p_c(\mathbb{Z}^2, q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}},$$

prouvée récemment [**3**].

L'intérêt physique de ce modèle est son lien avec des systèmes classiques comme le **modèle d'Ising** ou celui de Potts : si, partant d'une configuration de loi $P_{p,2}$, on choisit pour chaque composante connexe un signe ± 1 avec probabilité $1/2$ pour chaque valeur, de manière indépendante, on arrive à un choix de signes sur les sites de $\mathbb{Z}^d$ qui est distribué selon le modèle d'Ising à la température inverse β satisfaisant $p = 1-e^{-\beta}$, et on retrouve par exemple le résultat d'Onsager sur $\mathbb{Z}^2$: $\beta_c = \ln(1+\sqrt{2})$.

Au point critique, et par des méthodes entièrement différentes de celles utilisées pour la percolation, Smirnov prouve également l'invariance conforme pour une certaine observable du modèle, dite *observable para-fermionique* [**18**] ; mais comme l'énoncé du résultat ne peut pas se faire sans introduire des notations supplémentaires, il dépasserait le cadre de cette note.

Références

[1] M. Aizenman & D. J. Barsky – « Sharpness of the phase transition in percolation models », *Communications in Mathematical Physics* **108** (1987), no. 3, p. 489–526.

[2] V. Beffara – « Cardy's formula on the triangular lattice, the easy way », in *Universality and Renormalization* (I. Binder & D. Kreimer, éds.), Fields Institute Communications, vol. 50, The Fields Institute, 2007, p. 39–45.

[3] V. Beffara & H. Duminil-Copin – « The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$ », preprint arXiv 1006.5073, 2010.

[4] I. Benjamini & O. Schramm – ≪ Percolation beyond $\mathbb{Z}^d$, many questions and a few answers ≫, *Electronic Communications in Probability* **1** (1996), p. no. 8, 71–82 (electronic).

[5] S. R. Broadbent & J. M. Hammersley – ≪ Percolation processes, I and II ≫, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), p. 629–645.

[6] R. M. Burton & M. Keane – ≪ Density and uniqueness in percolation ≫, *Communications in Mathematical Physics* **121** (1989), no. 3, p. 501–505.

[7] G. R. Grimmett & C. M. Newman – ≪ Percolation in $\infty+1$ dimensions ≫, in *Disorder in physical systems*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1990, p. 167–190.

[8] G. R. Grimmett – *Percolation*, second éd., Grundlehren Math. Wiss., vol. 321, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] O. Häggström & Y. Peres – ≪ Monotonicity of uniqueness for percolation on Cayley graphs : all infinite clusters are born simultaneously ≫, *Probability Theory and Related Fields* **113** (1999), no. 2, p. 273–285.

[10] J. M. Hammersley – ≪ Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration ≫, in *Le calcul des probabilités et ses applications. Paris, 15-20 juillet 1958*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXXVII, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959, p. 17–37.

[11] H. Kesten – ≪ The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2 ≫, *Communications in Mathematical Physics* **74** (1980), no. 1, p. 41–59.

[12] ———, ≪ Scaling relations for 2D-percolation ≫, *Communications in Mathematical Physics* **109** (1987), p. 109–156.

[13] M. V. Menshikov – ≪ Coincidence of critical points in percolation problems ≫, *Soviet Mathematics Doklady* **33** (1986), p. 856–859.

[14] I. Pak & T. Smirnova-Nagnibeda – ≪ On non-uniqueness of percolation on nonamenable Cayley graphs ≫, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 6, p. 495–500.

[15] L. Russo – ≪ A note on percolation ≫, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **43** (1978), no. 1, p. 39–48.

[16] P. D. Seymour & D. J. A. Welsh – ≪ Percolation probabilities on the square lattice ≫, *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), p. 227–245, Advances in graph theory (Cambridge Combinatorial Conf., Trinity College, Cambridge, 1977).

[17] S. Smirnov – ≪ Critical percolation in the plane : Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits ≫, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I : Mathématiques* **333** (2001), no. 3, p. 239–244.

[18] ———, ≪ Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model ≫, *Annals of Mathematics* **172** (2010), no. 2, p. 1435–1467.

[19] S. Smirnov & W. Werner – ≪ Critical exponents for two-dimensional percolation ≫, *Mathematical Research Letters* **8** (2001), p. 729–744.

Vincent BEFFARA, CNRS, UMPA, ENS Lyon • *E-mail :* `vbeffara@ens-lyon.fr`
Url : `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~vbeffara/`